Дәріс 10
Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Лейбниц формуласы.

Жоғары ретті туындылар. f функцияның (a,b) аралығында туындысы бар болса, онда $f'(x)$ белгілі функция болады. Өз кезегінде бірінші туындының да (a,b) аралығында туындысы болуы мүмкін. Бұл жағдайда оны f функциясының **екінші ретті туындысы** дейді және $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ немесе $y''=(y')'$ арқылы белгілейді.

Жалпы f - тің $(n-1)$ ретті туындысының туындысы f функцияның n **- ші ретті туындысы** деп атайды да

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ немесе } y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$$

деп белгілейді. n - рет дифференциалданатын $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының қосындысы мен көбейтіндісі үшін келесі дифференциалдау ережесі орындалады:

1. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$;

Лейбниц формуласы:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}\cdot v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\ldots+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+u\cdot v^{(n)}$$

мұнда $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0!=1!=1$. Бұл теңдіктерді математикалық индукция әдісін пайдаланып дәлелдеуге болады.

Жоғары ретті дифференциал. f(x) (a,b) аралығында n -рет дифференциалданатын функция, x -тәуелсіз айнымалы. Онда f функциясының x нүктесіндегі $dy=f'(x)dx$ **бірінші дифференциалынан** алынған дифференциал f функциясының **екінші дифференциалы** деп аталады да $d^2y=d(dy)$ арқылы белгіленеді, және

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=$$

$$=dx\cdot d[f'(x)]=dx\cdot f''(x)dx=f''(x)dx^2 \text{ тең } (dx-const)$$

$y=f(x)$ функциясының n **- ретті дифференциалы** деп f функциясының $(n-1)$ - ретті дифференциалының дифференциалын айтады және оны келесі түрде белгілейді.

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

n – ші ретті дифференциал үшін

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n,$$

теңдігі орындалады. n – ші ретті дифференциалдар үшін келесі ережелер орындалады:

1) $d^n(u+v)=d^nu+d^nv$;
2) $d^n(u\cdot v)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}u\cdot d^kv.$

Лопиталь ережесі.

Тейлор формуласы. Маклорен формуласы, негізгіэлементар функциялардың жіктелуі.

$f(x)$ функциясы X аралығында анықталып, $x_0 \in X$ нүктесінде $f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$ туындылары бар болсын. $f(x)$ функциясын жуықтау құралы ретінде сәйкес туындылары $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындыларымен беттесетін n дәрежелі көпмүшелікті, яғни

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

көпмүшелігін алайық. Ол $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі Тейлор көпмүшелігі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясы n дәрежелі көпмүшелік болса, онда әрбір $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ үшін $f(x) = P_n(x)$

Басқа жағдайларда ондай теңдік орындалмауы мүмкін, демек *қателік* немесе *қалдық мүше* деп аталатын

$$R_{n+1}(x; f) = f(x) - P_n(x)$$

функциясын қарауымыз қажетті.

$R_{n+1}(x; f)$ функциясының анықтамасынан шығатын

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x; f)$$

формуласын Тейлор формуласы деп атайды.

$x_0 = 0$ болғанда, Тейлор формуласы мына түрге келеді:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

Кейбір негізгі элементтар функциялардың Тейлор формуласымен жіктелуі:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\mu(\mu - 1)...(\mu - n + 1)}{n!}x^n + \frac{\mu(\mu - 1)...(\mu - n)(1 + \theta x)^{\mu - n - 1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Тейлор формуласын жуықтап есептеуге қолданады.

Мысалы, е санын 0,001 дәлдігімен есептеу керек.

$f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

Тейлор формуласында $x = 1$ тең деп аламыз,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$0 < c < 1$, онда $e^c < 3$ және қалдық мүше $\frac{e^c}{(n+1)!}$ <0.001, $n = 6$деп алсақ, онда

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} < 0.001.$$

Сонымен,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718$$